



OLIMPIADAS DE MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
INSTITUTO DE MATEMÁTICAS
TALLER: OCTAVO

1. Lógica

1. Alejandra, Sara y Tatiana tienen diferentes edades. Exactamente una de las siguientes tres afirmaciones es verdadera:

1. Sara es la mayor.
2. Alejandra no es la mayor.
3. Tatiana no es la más joven.

¿Quién es la menor?

- (a) Alejandra
- (b) Sara
- (c) Tatiana
- (d) No se puede determinar
- (e) La información es contradictoria

2. En una clase de 36 alumnos, la mitad juega al fútbol, un tercio al baloncesto y el 25% a ambos deportes. ¿Cuál es el número de alumnos que no juegan a ninguno de los dos deportes?

- (a) 8
- (b) 10
- (c) 12
- (d) 15
- (e) 20

3. Se tiene un objeto del cual sabemos que:

- Si es verde, entonces es plano.
- Si es triangular, entonces también es negro.
- El objeto posee un color verde o blanco.
- Si es blanco se concluye que es triangular.
- De su forma geométrica podemos decir que es triangular o plano.

Esto significa:

- (a) Es blanco y triangular.
- (b) Es negro
- (c) Es negro y plano
- (d) Es verde y plano.
- (e) Es blanco y plano

4. Alejandro, Benjamín y Carlos son atletas de velocidad y están compitiendo sobre una pista recta. Aunque corran a velocidad constante, sus velocidades son diferentes. Si todos salen al mismo tiempo y sabemos que cuando Alejandro ha recorrido los primeros 100 metros, él está 20 metros al frente de Benjamín y 50 metros al frente de Carlos. Entonces, cuando Benjamín haya recorrido 100 metros, ¿cuántos metros de diferencia le llevará a Carlos?

- (a) 20 m
- (b) 25.5 m
- (c) 30 m
- (d) 35 m
- (e) 37.5 m

2. Álgebra

5. Si $x + \frac{1}{x} = \sqrt{22}$. Encuentre el valor de: $x^2 + \frac{1}{x^2}$

- (a) 22
- (b) 20
- (c) 11
- (d) 10
- (e) 5

6. Dados dos números reales positivos a y b . Defina la operación Δ así, $a\Delta b = \frac{a^b}{b^a}$. De las afirmaciones siguientes, la única verdadera es:

- (a) $a\Delta \frac{1}{a} = \frac{1}{\frac{1}{a}\Delta a}$
- (b) $a\Delta(b+c) = (a\Delta b) + (a\Delta c)$
- (c) $\frac{1}{a}\Delta b = \frac{1}{b}\Delta a$
- (d) $a\Delta b = b\Delta a$
- (e) $a\Delta 1 = 1\Delta a$

7. Sea A_i una secuencia tal que:

$$\begin{aligned}A_1 &= 1 \\A_2 &= 1 + 3 + 1 \\A_3 &= 1 + 3 + 5 + 1 \\A_4 &= 1 + 3 + 5 + 7 + 1 \\&\vdots\end{aligned}$$

¿Cuál es el valor de A_{51} ?

- (a) 2501
- (b) 2598
- (c) 2602
- (d) 2701
- (e) 2802

8. Dado que $x = 2$, $y = 1$ es la solución al sistema

$$\begin{cases} ax + by = 7, \\ bx + cy = 5, \end{cases}$$

Entonces la relación entre a y c es

- (a) $4a + c = 9$
- (b) $2a + c = 9$
- (c) $4a - c = 9$
- (d) $2a - c = 9$
- (e) $3a - c = 9$

3. Combinatoria

9. Juan tiene 7 frutas distintas, de las cuales 2 son mandarinas y 5 son mangos. El número de maneras diferentes en que Juan puede acomodar las 7 frutas en una mesa de manera que las mandarinas estén juntas es:

- (a) 2020
- (b) 240
- (c) 960
- (d) 670
- (e) 1440

10. Para ir de la ciudad A a la ciudad B hay 4 caminos, para ir de la ciudad B a la ciudad C hay 3 caminos, entre la ciudad C y la ciudad D hay sólo 2 caminos. ¿Cuántos caminos hay para ir de la ciudad A a la D sin devolverse?

- (a) 9
- (b) 12
- (c) 15
- (d) 20
- (e) 24

11. Se eligen cifras del número 2019 y con ellas se forman números de tres cifras distintas. ¿Cuántos números pueden formarse que sean impares y múltiplos de 3?

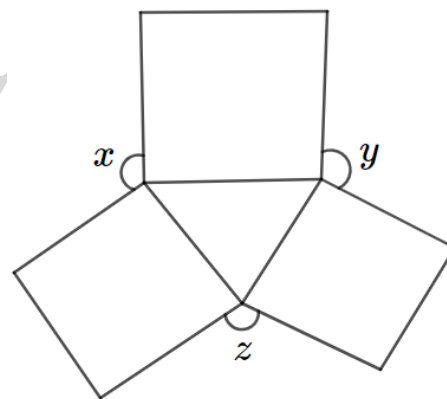
- (a) 12
- (b) 4
- (c) 3
- (d) 7
- (e) 9

12. Óscar tiene su calculadora dañada, dado que ésta no muestra el número 0. Por ejemplo, si tratamos de escribir con ella el número 72050, sólo aparece en la pantalla el número 725. Óscar trató de escribir un número de 6 dígitos en esa calculadora pero sólo apareció en pantalla el número 5257. ¿Cuántos posibles números pudo haber intentado escribir Óscar en la calculadora?

- (a) 9
- (b) 10
- (c) 12
- (d) 13
- (e) 16

4. Geometría

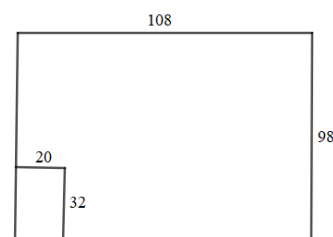
13. El diagrama muestra tres cuadrados cada uno tiene un lado situado sobre un triángulo.



¿Cuál es el valor de la suma de los ángulos x , y y z ?

- (a) 180°
- (b) 210°
- (c) 270°
- (d) 300°
- (e) 360°

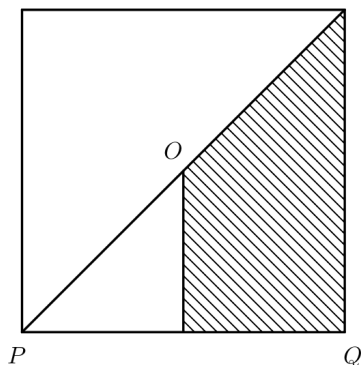
14. Un rectángulo de dimensiones $20\text{cm} \times 32\text{cm}$ está situado en un vértice de un rectángulo mayor de dimensiones $108\text{cm} \times 98\text{cm}$ como lo muestra la figura:



¿Cuál es la distancia entre los centros de cada rectángulo?

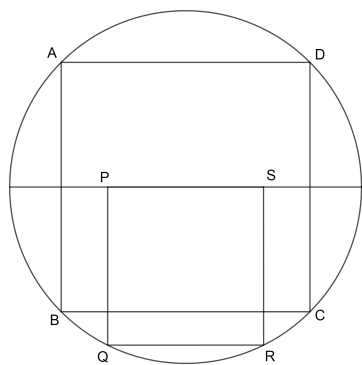
- (a) 37 cm
- (b) 43 cm
- (c) 47 cm
- (d) 55 cm
- (e) 71 cm

15. Se ha dibujado un rectángulo con centro O , como lo muestra la figura. Si se sabe que el área del triángulo OPQ vale 6 cm^2 , el área de la figura rayada es:



- (a) 18 cm^2
- (b) 15 cm^2
- (c) 12 cm^2
- (d) 10 cm^2
- (e) 9 cm^2

16. ¿Cuál es la razón entre el área del cuadrado $PQRS$ y el área del cuadrado $ABCD$?



- (a) $\frac{1}{2}$
- (b) $\frac{2}{5}$
- (c) $\frac{3}{5}$
- (d) $\frac{4}{5}$
- (e) $\frac{3}{4}$

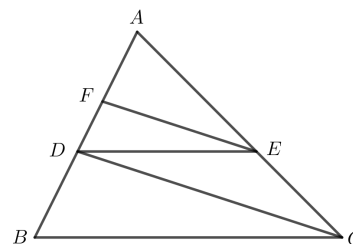
5. Preguntas abiertas

17. (Lógica) En una tienda, hay una maquina expendedora de bolas de chicle con dos botones y un recipiente: El primer botón suelta 16 bolas de chicle en el recipiente, mientras que el segundo botón incrementa el número de bolas de chicle en el recipiente en un 50%. Después de insertar una moneda, se puede apretar uno de los dos botones. Si el recipiente empieza vacío, ¿cuál es la máxima cantidad de bolas de chicle que se pueden comprar con 5 monedas?

18. (Álgebra) Si se sabe que $x + y = 5$ y $xy = 3$. ¿Cuál es el valor de $x^2 + y^2$?

19. (Combinatoria) Luis tiene ocho cajas numeradas del 1 al 8 y ocho bolas, numeradas también del 1 al 8. ¿De cuántas formas puede distribuir las bolas, una en cada caja, de manera que ninguna de las bolas 1, 2 y 3 esté en la caja con su misma numeración?

20. (Geometría) En el triángulo ABC , DE es paralela a BC , FE es paralela a DC , $AF = 4\text{cm}$ y $FD = 6\text{cm}$.



¿Cuánto mide DB ?