

## Taller de problemas con funciones

1. Si  $h(x) = 3x^2 - 2bx - 5$  y  $h(-2) = 7$ . ¿Cuál es el valor de  $b$ ?
2. Sea  $f$  una función definida por  $f(x) = ax^2 - \sqrt{2}$  para algún número positivo  $a$ .  
Si  $f(f(\sqrt{2})) = -\sqrt{2}$ . Encuentre  $a$ .
3. Sea  $f$  un polinomio tal que, para todos los números reales  $x$ ,  $f(x^2 + 1) = x^4 + 5x^2 + 3$ . Para todo número real  $x$ , encuentre  $f(x^2 - 1)$ .
4. Si  $f(2x) = \frac{2}{2+x}$  para todo  $x > 0$ , ¿cuál es el valor de  $2f(x)$ ?
5. Sea  $f(n)$  el número de veces que aparece el 1 cuando se escriben los números desde el 1 hasta  $n$ . Por ejemplo  $f(8) = 1$ ,  $f(9) = 1$ ,  $f(10) = 2$ ,  $f(11) = 4$  y  $f(12) = 5$ . Determine el valor  $f(321)$ .
6. Si  $f(x) = ax^4 - bx^2 + x + 5$  y  $f(-3) = 2$ , encuentre  $f(3)$
7. Una función lineal  $f$  satisface que  $f(1) = 3$  y  $f(f(1)) = 7$ , encuentre  $f(f(5))$ .
8. Para todo número positivo  $a$  y  $b$ , una función  $f$  satisface la ecuación  $f(ab) = f(a) + f(b)$ . Si  $f(5) = x$  y  $f(7) = y$ . ¿Cuál es el valor de  $f(245)$ .
9. Sea  $f(x)$  es una función definida sobre los números enteros  $x$  y supongamos que satisface las siguientes propiedades:
  - a)  $f(0) \neq 0$
  - b)  $f(1) = 3$
  - c)  $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$Determine el valor de  $f(7)$ .
10. Sea  $f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$  para  $-1 < x < 1$ , Entonces reescribe  $f\left(\frac{3x+x^3}{1+3x^2}\right)$  en

terminos de  $f(x)$ .

11. Supongamos que  $f$  es una función real valuada tal que

$$f(m+1) = m(-1)^m - 2f(m)$$

y  $f(1) = f(10)$ . Encuentre

$$f(1) + f(2) + \dots + f(9)$$

12. Si  $f(x) = 2^x$ , para que valor de  $n$  es  $f^n(2) = 4^8$ . Donde  $f^n(x) = f(f(f \dots (f(x))))$  con  $f$  repitiéndose  $n$  veces.)

13. Supongamos que una función  $f$  es dada por las siguiente tabla

$x$	1	2	3	4	5
$f(x)$	2	4	1	5	3

Supongamos que  $x_0 = 2$  y  $x_{n+1} = f(x_n)$ . Encuentre el valor de  $x_{2015}$ .

14. Una función es tal que para cada entero  $n$ ,

$$f(n+1) = \frac{f(n)}{1 + af(n)},$$

donde  $a$  es un número real,  $f(1) = 1$  y  $f(11) = \frac{1}{2011}$ . Encuentre  $a$ .

15. Sea  $g$  una función tal que

$$3g(x) + 2g(1-x) = 9 + 2x$$

para todo  $x$ . Encuentre el valor de  $g(2)$ .

16. Sea  $f$  uan función la cual satisface que  $f(29+x) = f(29-x)$  para todo número real  $x$ . Si la ecuación  $f(x) = 0$  tiene exactamente tres soluciones diferentes  $a, b$  y  $c$ . Determine la suma de  $a + b + c$ .

17. Sea  $f$  una función la cual satisface que  $f(1+x) = f(1-x)$  para todo número real  $x$ . Si la ecuación  $f(x) = 0$  tiene exactamente cuatro raíces diferentes. Determine el valor de la suma de estos.
18. Sea  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  y sea  $f^{k+1}(x) = f(f^k(x))$ , con  $f^1(x) = f(x)$ . ¿Cuál es el valor de  $f^{2015}(2015)$ ?
19. Sea  $f$  una función de los enteros no negativos a los reales positivos tal que  $f(x+y) = f(x)f(y)$  se cumple para todos los enteros no negativos  $x$  y  $y$ . Si  $f(19) = 524288k$ , Encuentre  $f(4)$  en términos de  $k$ .
20. Sea  $f(x) = x^2 - 2$  y  $f^n$  denota la función  $f$  aplicada  $n$  veces. Calcule el residuo de  $f^{24}(18)$  cuando se divide por 89.
21. Consideremos el arreglo triangular de números con  $0, 1, 2, 3, \dots$  a lo largo de los lados y los números del interior se obtienen sumando los números adyacentes en la fila anterior (Como en el triángulo de Pascal). Se muestra las filas de la 1 a la 6.

			0		
		1	1		
	2	2	2		
	3	4	4	3	
	4	7	8	7	4
5	11	15	15	11	5

Sea  $f(n)$  la suma de los números en la fila  $n$ . ¿Cuál es el residuo que deja  $f(100)$  cuando se divide por 100?