Olimpiadas Matemáticas
Universidad de Antioquia
www.gkmath.com

Taller de preparación y entrenamiento
2016

olimpiadasmatematicas@udea.edu.co

1. Estrategias para la resolución de problemas

"Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero hay una pizca de descubrimiento en la solución de cualquier problema. Tu problema puede ser modesto, pero si es un reto a tu curiosidad y trae a juego tus facultades inventivas, y si lo resuelves por tus propios métodos, puedes experimentar la tensión y disfrutar del triunfo del descubrimiento".

George Pólya (1887 – 1985).

Matemático húngaro impulsor de diversas ramas de matemática avanzada.

Las situaciones problemáticas son comunes en la vida de las personas. Los estudiantes también se ven enfrentados frecuentemente a resolver problemas. Pensar el pensar se denomina en psicología metacognición.
George Pólya nos propone un modelo de como enfrentar las situaciones problemáticas, relacionadas principalmente con las matemáticas, la cual denominaremos "la propuesta de Pólya".
En un plan de cuatro pasos, que llamaremos las "reglas de Oro", Pólya sintetiza la forma de como encarar, manipular y llegar a la (re-)solución de un problemas. Estas 4 reglas son:

1. COMPRENDER EL PROBLEMA
2. CREAR UN PLAN
3. EJECUTAR EL PLAN
4. EXAMINAR LO HECHO

Recomendamos a las personas que estén leyendo estas notas, dar un vistazo a su libro: "How to Solve It" (que fue traducido al español por: "Cómo plantear y resolver problema"), el cual fue escrito en 1957 y como podrán corroborar su propuesta y orientaciones dirigidas a la solución de problemas en matemáticas aún siguen vigentes.
Un estudiante cuyos estudios incluyan cierto grado de matemáticas tiene también una particular oportunidad. Dicha oportunidad se pierde, claro está, si ve las matemáticas como la materia de la que tiene que hacer un examen al final y de la cual no volverá a ocuparse una vez pasado éste.
La oportunidad puede perderse incluso si el estudiante tiene un talento natural por las matemáticas, ya que él, como cualquier otro, debe descubrir sus capacidades y aficiones; no puede saber si le gusta la torta de chocolates si nunca la ha probado. Puede descubrir, sin embargo, que un problema de matemáticas puede ser tanto o más divertido que un crucigrama; o que un vigoroso trabajo intelectual puede ser un ejercicio tan agradable como jugar al fútbol. Habiendo probado el placer de las matemáticas, ya no las olvidará fácilmente. Se presentará entonces una buena oportunidad para que las matemáticas adquieran un sentido para él, ya sean como un pasatiempo o como una herramienta de su profesión, o su profesión misma o la ambición de su vida.
El modelo que Pólya propone es un conjunto de fases y preguntas que orientan y protocolizan el itinerario de la búsqueda y exploración de las alternativas de respuesta, con una situación inicial, una situación final desconocida y una serie de condiciones y restricciones que definen la situación. La fases y preguntas son las siguientes:

1. **Comprender el problema**: Aquí se resume toda la información dada y que se desea determinar. Es la etapa donde se formulan las siguientes preguntas:
   a) ¿Cuál es la pregunta? ¿Cuáles son sus datos? ¿Cuáles son las condiciones?
   b) ¿Es posible satisfacer las condiciones? ¿Son suficientes las condiciones para determinar lo desconocido?
   c) ¿Hay redundancias? ¿Hay contradicciones? Haga una figura.
   d) Introduzca notación adecuada. Separe las partes que puedan tener las condiciones o los datos. ¿Puede escribirlas?
2. **Crear un plan**: es el momento para expresar la relación entre los datos y la incógnita a través de una ecuación o fórmula. En ciertos casos, puede estar obligado a considerar problemas auxiliares. Aquí es donde se diseña una estrategia que conduzca a la solución del problema. A continuación damos ciertas guias de preguntas imprescindibles para ir trazando la "hoja de ruta" para la solución del problema:
   a) ¿Lo ha visto antes? O, ¿ha visto el mismo problema bajo una forma diferente? ¿Conoce un problema relacionado? ¿Conocer un Teorema o una regla que podría ser útil?
   b) Observe la pregunta, la incógnita. ¿Puede pensar en un problema que le sea familiar y que tenga la misma pregunta o la misma incógnita?
   c) Si encuentra un problema similar que haya resuelto antes, ¿puede usarlo ahora? ¿Puede usar los resultados? ¿Puede usar el procedimiento? ¿Debe introducir algún elemento auxiliar para usar lo que ya conoce?
   d) ¿Puede enunciar el problema de otro modo? ¿Puede enunciarlo aún en otra forma?
   e) Regrese a las definiciones, a los conceptos que tiene que utilizar.
   f) Si no puede resolver el problema trate primero de resolver otro relacionado con él. ¿Puede imaginarse un problema parecido más accesible, más fácil? ¿Uno más general? ¿Uno más específico? ¿Uno parecido? ¿Puede resolver una parte del problema?
   g) Mantenga sólo una parte de las condiciones; abandone el resto, ¿hasta que punto queda determinada la incógnita? ¿Cómo varía la incógnita? ¿Puede deducir algo útil de los datos? ¿Puede pensar en otros datos para determinar la incógnita? ¿Puede cambiar la incógnita, o los datos, ambos, o de modo que la nueva incógnita y los nuevos datos esten más cerca?
   h) ¿Usó todos los datos? ¿Usó todas las condiciones? ¿Ha tomado en cuenta todos los conceptos esenciales incluidos en el problema?

   Ahora bien, entre las diferentes estrategias para la concepción de un plan en matemáticas Polya propone algunas como las siguientes y que nosotros ilustraremos mas adelante:
   a) Emplear una notación adecuada.
   b) Buscar un patrón de comportamiento.
   c) Dibujar una figura o hacer un diagrama.
   d) Emplear el razonamiento indirecto ("por contradicción").
   e) Resolver un problema equivalente.
   f) Trabajar de atrás hacia adelante.

    g) Dividir el problema en casos.
    h) Considerar casos extremos.
    i) Explorar la simetría.

3. **Ejecutar el plan**: en esta etapa llevamos a cabo nuestro plan, aplicando la o las estrategias que se escogieron para solucionar completamente el problema o hasta que la misma te sugiera utilizar otra estrategia, cabiendo la posibilidad, en que esta no funcione. Es importante que al ejecutar su plan verifique cada uno de los pasos, donde serán pertinentes preguntas como: ¿Puede estar seguro de que cada uno está correcto? ¿Puede demostrar (o argumentar) que está correcto?

4. **Examine la solución obtenida**: consiste en examinar a fondo cálculos y razonamientos matemáticos utilizados, y que la solución corresponde al problema propuesto. Por otro lado, es la etapa donde miramos hacia la posibilidad de la generalización o de examinar la posibilidad de una solución más sencilla.

    a) ¿Puede usted comprobar la respuesta? ¿Puede usted comprobar los argumentos?
    b) ¿Puede obtener el resultado por un camino diferente? ¿Puede usted "ver"la respuesta de una sola mirada?
    c) ¿Puede usar el resultado o el procedimiento para resolver otro problema?

2. Miscelánea de problemas Nivel 1

1. En una clase de 29 alumnos, hay 3 niñas mas que niños. ¿Cuántas niñas hay en la clase?.

2. En una chaqueta de un gigante hay 520 bolsillos, en cada uno viven 3 ratones y cada ratón esta acompañado por 5 ratoncitos ¿Cuántos ratoncitos viven en la chaqueta del gigante?.

3. 96 niños van a un campamento de verano y van a ser repartidos en varios grupos, de modo que cada grupo tenga el mismo número de niños. ¿De cuántas formas diferentes puede hacerse esto, si cada grupo debe tener más de 5 niños pero menos de 20?.

4. Carlos presta si triciclo a razón de 2 chocolatinas por 3 horas o 12 dulces por 4 horas. Miguel le da a Carlos 3 chocolatinas y 16 dulces. ¿Cuánto tiempo podrá Miguel conducir el triciclo?.

5. María siempre miente de Lunes a miércoles y dice la verdad el resto de la semana. ¿Qué día puede haber dicho:

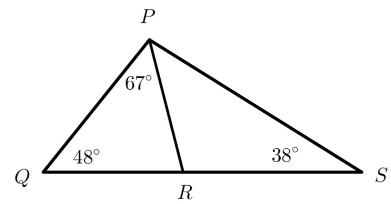
    - "mentí ayer"
    - "mentiré mañana"

6. Si ayer hubiera sido sábado, dentro de 72 horas sería el día de la semana que realmente será pasado mañana. ¿Qué día de la semana será mañana?.

7. A que es igual el valor de la siguiente suma $\frac{1}{2016\times 1} + \frac{1}{2016} + \ldots + \frac{1}{2016\times 8}$.

8. El número 2016 tiene la propiedad de que las cifras de las unidades es igual a dos veces la suma de las anteriores. En el actual milenio (que empezó en 2001 y termina en 3000), ¿cuántos años tienen esta propiedad?.

9. En la figura, el punto R pertenece al segmento QS. ¿Cuál es la medida del ángulo $\angle RPS$?



3. Miscelánea de problemas Nivel 2

1. Juan consigue escribir 20 páginas de un libro en 4 horas y Andrea lo hace en 5 horas. Los 2 tienen la tarea de transcribir un libro de 900 paginas. Si los dos comienzan a transcribir al mismo tiempo entonces ¿Cuántas p”aginas debe transcribir Andrea de tal manera que ambos terminen juntos?

2. La fortuna de Juan fué dividida de la siguiente forma: $\frac{1}{5}$ para su hermano, $\frac{1}{6}$ del restante para sus hermanas y partes iguales de la fortuna para cada uno de sus 12 hijos. ¿Qué fracción de la fortuna recibió cada hijo?.

3. Ana le dice a Lucy: “si te doy 6 de mis colores entonces quedaría con $\frac{2}{3}$ de la cantidad tuya”. Lucy replica “si te doy 10 de los míos entonces quedaría con $\frac{1}{2}$ de los tuyos”. ¿Cuáles son las cantidades de colores que tienen Ana y Lucy?.

4. ¿Cuántos números de 2 cifras son divisibles por 2 y por 9?.

5. En la tienda de don Pedro hay un artículo que tiene el 10 % de descuento. Don Pedro decide hacer un descuento sobre el valor actual. ¿Cuánto fué el descuento total que obtuvo el artículo?.

6. La suma de 8 números impares consecutivos es 119. ¿El menor de esos números es?.

7. Delio tiene un gran número de bloques de $2cm \times 6cm \times 8cm$. Él quiere usar algunos de ellos para formar un cubo. ¿Cuál es el menor número de bloques que necesita para formar un cubo?.

8. La última cifra de un número de 3 cifras es 2. Si ponemos esta cifra como la primera, el número disminuye en 36. ¿Cuál es la suma de las cifras del número original?.

9. El número de muchachos que ha resulto un problema interesante es el mismo que el de muchachas que no lo han resuelto. ¿Qué cantidad es mayor. los que han resuelto el problema o las chicas?.

10. ¿Cuál es la última cifra del número $-1^2 + 2^2 - 3^2 + \ldots - 2015^2 + 2016^2$?.

11. A cada uno de los 100 participantes de un concurso de matemáticas se le han propuesto 4 problemas. 90 participantes resolvieron el primer problema, 85 el segundo, 80 el tercero y 70 el cuarto. ¿Cuál es el menor número posible de participantes que resolvieron los 4 problemas?.

12. Si los lados de un rectángulo disminuyen en un 30 %. ¿En cuánto disminuye el área?.

13. Si a, b, c, d, e son enteros distintos y $(4-a)(4-b)(4-c)(4-d)(4-e) = 12$ entonces a que es igual $a+b+c+d+e$.

14. Calcular $(1+\frac{1}{1})(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\ldots(1+\frac{1}{2016})$.

15. ¿Cuál es el número de enteros positivos n tales que $\frac{2016}{n+50}$ es un entero?.

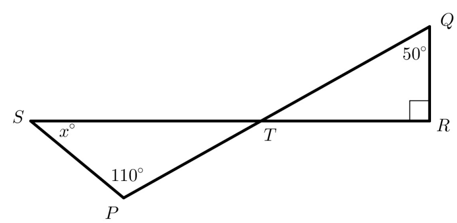
16. S es el punto medio de la hipótenusa del triángulo rectángulo ABC. El segmento SC mide 2 y el ángulo $\angle ASC$ es de 60 grados. ¿Cuánto vale el área del triángulo ABC. (hacer figura)

17. La suma de los cuadrados de 3 enteros consecutivos es igual a 302. ¿Cuál es la suma de los números?

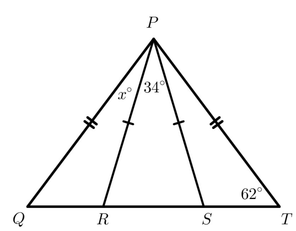
18. Sea a un número entero positivo tal que a es múltiplo de 5, $a+1$ es múltiplo de 7, $a+2$ es múltiplo de 9 y $a+3$ es múltiplo de 11. Determinar el menor valor de a.

19. Factorize la expresión $x^2 - 9xy + 8y^2$.

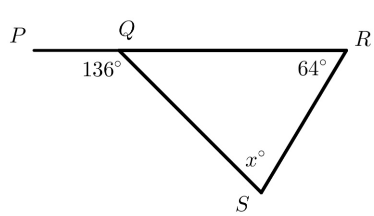
20. En la figura, los segmentos PQ y RS se intersecan en T. ¿Cuál es el valor de x?



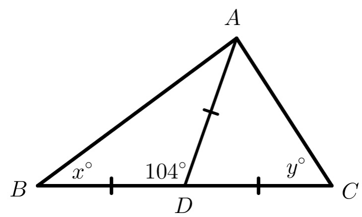
21. En la figura, los puntos R y S pertenecen al segmento QT, también, $\angle PTQ = 62°$, $\angle RPS = 34°$ y $\angle QPR = x°$. ¿Cuál es el valor de x?



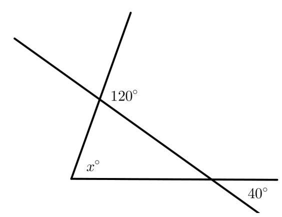
22. En la figura, el punto Q, pertenece al segmento PR. Halle el valor de x.



23. En el triángulo ABC, ¿cuál es el valor de $x+y$?



24. En la figura, ¿cuál es el valor de x?



25. La suma de todas las áreas de los triángulos que se pueden formar en la figura es:

4. Miscelánea de problemas Nivel 3

1. La ecuación de segundo grado $ax^2 + bx - 3$ tiene a -1 como una de sus raices. Sabiendo que los coeficientes a, b son números primos positivos. Entonces determinar el valor de $a^2 + b^2$.

2. ¿Cuál es el conjunto solución de la inecuación $\frac{1}{x} > \frac{1}{x-1}$?

3. Un litro de limonada contiene un 80 % de agua. ¿Qué porcentaje de agua contendrá la limonada, si alguien bebe medio litro?.

4. ¿Qué 3 cifras hay que borrar del número 4823509, sin cambiar el orden, para obtener el menor número posible de 4 cifras?

5. Juan va al gimnasio todos los días; Pedro cada 2 días, rosa cada 3 días, Carlos cada 4 días, Juana cada 5 días, Luis cada 6 días, Gabriel cada 7 días y Teresa cada 8 días. Hoy están todos en el club. ¿Cuántos días pasaran hasta lo próxima vez que se encuentren en el gimnasio?.

6. ¿Cuántos pesos diferentes se pueden medir con una balanza y 4 pesas de $1, 2, 4, 8$ kilogramos?

7. El 80 % de una fotografía a blanco y negro es de color negro y el 20 % es blanco. Si se quiere hacer 5 copias de una fotografía y en cada una de ella se gasta un total de $0{,}3cm^3$ de tinta. ¿Cuál fue la cantidad de tinta blanca que se gastó?.

8. En una competencia los jueces califican a los competidores con puntuaciones enteras. La media de las puntuaciones concedidas a un concursante es 5,625. ¿Cuál es el menor número de jueces para que esto sea posible?.

9. Una hormiga va del punto A al punto B por la superficie de un cilindro. Si $r = 1$ y $h = 6$. ¿Cuál es la longitud del camino mas corto?

10. Sea $D(a,b)$ el máximo común divisor entre a y b. Entonces $D(7,2)+D(7,3)+\ldots+D(7,35)$ a que es igual.

11. ¿Cuál es la probabilidad de que un número de tres cifras elegido al azar sea par y mayor que 399?

12. Qué dígitos se han omitido en la siguiente multiplicación:

$$\begin{array}{cccc} & 2 & * & * \\ & \times & * & * \\ & * & 6 & 1 \\ * & * & * & \\ * & * & 0 & 1 \end{array} \tag{1}$$

13. En una clase hay 21 alumnos. Ningún par de chicas tiene el mismo número de amigos en la clase. ¿Cuál es el mayor número de chicos que puede haber en la clase?.

14. ¿Cuántos números primos p tienen la propiedad de que p^4+1 es primo también?.

15. Si $x^2yz^3=7^3$ y $xy^2=7^9$. Entonces a que es igual xyz.

16. Hallar el valor de de la expresión $x^2+y^2+z^2$, si $x+y+z=1$ y $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$.

17. En un acuario hay 2000 peces. El 2 % de ellos son azules y el resto son amarillos. ¿Cuántos peces amarillos hay que sacar del acuario para que los amarillos representen el 2 % de todos los peces que quedan en le acuario?.

18. El mínimo común múltiplo entre dos números es $2^5 3^4 7^8$ y su máximo común divisor es $2^2 3^2 7^2$ y uno de los números es 1764. ¿Cuál es el otro?.

19. En un examen la puntuación media de 6 estudiantes es 3,4. Después de calificar el examen de un séptimo estudiante, ese promedio sube a 3,6. ¿Cuál fue la calificación obtenida por el séptimo estudiante?.

20. Si $3^x=a$ y $a^y=81$. ¿Cuánto vale el producto $x\times y$?.

21. Se dan 4 números. Sumando uno de ellos al promedio de los otros 3 de todas las maneras posibles, se obtienen los números $25,37,43,51$. ¿Cuál es el promedio de los 4 números dados al principio?.

22. Cuál es la suma de $\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{2^2}+\ldots+\frac{2^{2016}}{2^{2015}}$.

23. En la multiplicación

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & a & b \\ & \times & & b & 3 \\ & & * & * & * \\ & * & * & * & \\ 1 & c & c & 0 & 1 \end{array} \tag{2}$$

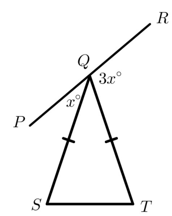
Calcule $a+b+c$

24. Simplifique la expresión

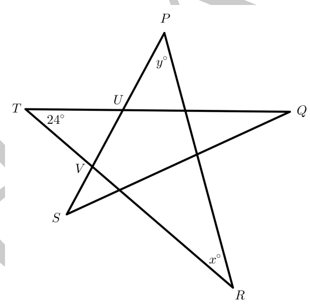
$$1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \frac{1}{x}}}$$

Sean x, y números reales positivos tal que $x^2 + x^2 = 1$ y $x^4 + y^4 = \frac{17}{18}$. Calcule el valor de $\frac{1}{xy}$.

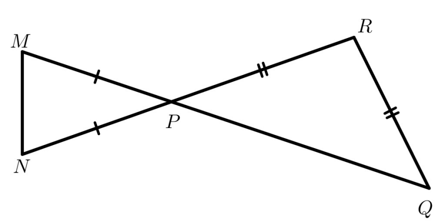
25. En la figura, PQR es un segmento y $QS = QT$, Si $\angle QTS = 76^\circ$, ¿cuál es el valor de x?



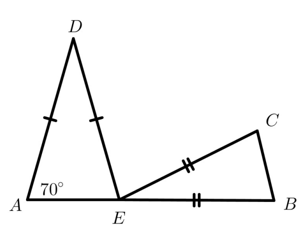
26. En la figura, los segmentos PR, PS, QS, QT y RT son segmentos. QT interseca a PR y PS en los puntos U y V respectivamente. Si $PU = PV$, $\angle UPV = 24^\circ$, $\angle PSQ = x^\circ$ y $\angle TQS = y^\circ$. ¿Cuál es el valor de $x + y$?



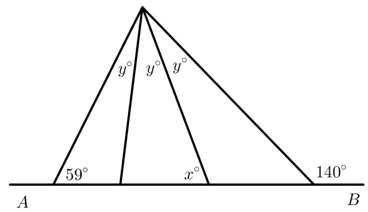
27. En la figura, si el ángulo $\angle PQR = 48^\circ$. ¿Cuál es la medida del ángulo $\angle PMN$



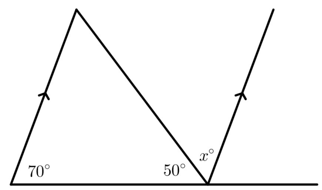
28. En la figura, El punto E pertenece al segmento AB y los triángulos AED y BEC son isósceles. También, el ángulo $\angle DEC$ es dos veces el ángulo $\angle ADE$. ¿Cuál es la longitud del ángulo $\angle EBC$?



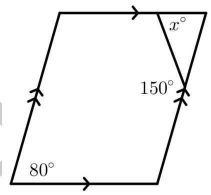
29. En la figura, ¿cuál es el valor de x?



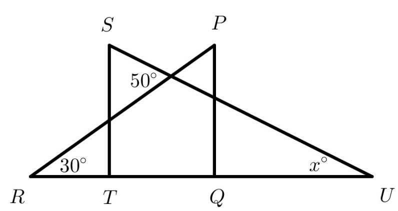
30. En la figura, ¿cuál es el valor de x?



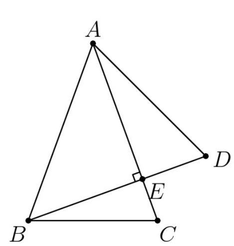
31. En la figura, ¿cuál es el valor de x?



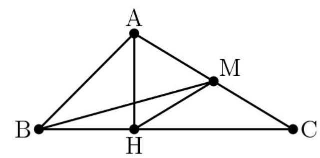
32. En la figura, Los triángulos PQR y STU se sobreponen de tal manera que los puntos T y Q pertenecen al segmento RU. ¿Cuál es el valor de x?



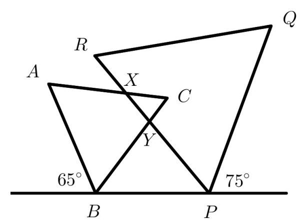
33. Los triángulos ABC y ABD son isósceles con $AB = AC = BD$, y BD interseca a AC en E. Si BD es perpendicular a AC, ¿Cuál es $\angle C + \angle D$?



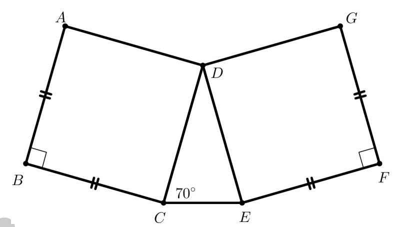
34. En un $\triangle ABC$, $\angle A = 100°$, $\angle B = 50°$, $\angle C = 30°$, $\overline{AH}$ es una altura, y $\overline{BM}$ es una mediana. Encuentre el valor de $\angle MHC$.



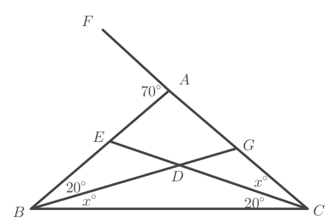
35. En la figura, Si los triángulos ABC y PQR son equiláteros, encuentre el valor del ángulo CXY.



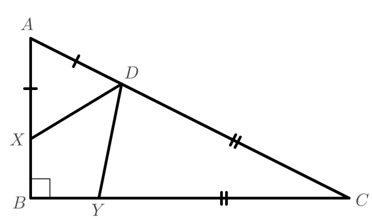
36. En la figura, los dos cuadrados ABCD y DEFG tienen lados de igual longitud. Encuentre el ángulo $\angle ADG$.



37. En la figura, encuentre el valor de x.



38. En el triángulo rectángulo ABC, $AX = AD$ y $CY = CD$, ¿cuál es la medida del ángulo $\angle XDY$?



39. En el triángulo (ver figura) $\angle CAB = 30$, $\angle CBA = 120$, CD es bisectriz del ángulo $\angle ACB$. Entonces $\frac{BC}{CD}$ a que es igual.

40. Sea $s(n)$ la suma de las cifras del número n. A que es igual $s(1) + s(2) + s(3) + \ldots + s(100)$.

41. Se eligen 3 puntos al azar de la siguiente configuración (ver figura). ¿Cual es la probabilidad de que estén alineados?